Теоретические основы решения нестандартных и занимательных задач в курсе математики начальных классов*

А.П. Тонких

ЛАБИРИНТЫ (греч. «ходы в подземельях») – *сооружения со сложным и запутанным планом.* Лабиринты бывают самой разнообразной формы и устройства. До наших дней сохранились запутанно-сложные галереи, и ходы пещер, и извилистые планы на стенах и полах, обозначенные цветным мрамором или черепицей, и извивающиеся тропинки на почве, и рельефные извилины в склонах. Все эти лабиринты имеют не только исторический, но и математический интерес.

Происхождение задач о лабиринтах относится к глубокой древности, причем многие из них пришли к нам из легенд и сказаний. Наши предки считали, что человек, попавший в лабиринт, не мог уже из него выйти, если только какое-либо чудо или случай не приходили ему на помощь. Однако следует иметь в виду, что безвыходных лабиринтов нет, что разобраться и найти выход из самого запутанного лабиринта обычно не составляет особого труда. Даже не имея плана лабиринта, но зная, что он имеет один выход, можно его пройти. Решение (т.е. маршрут, ведущий к цели) каждого лабиринта может быть найдено одним из трех сравнительно простых методов: методом проб и ошибок, методом зачеркивания тупиков, алгоритмом (правилом) одной руки.

Метод проб и ошибок. Выбирайте любой путь, а если он заводит в тупик, то возвращайтесь назад и начинайте все сначала.

Метод зачеркивания тупиков. Необходимо последовательно зачеркивать тупики, т.е. маршруты, не имеющие ответвлений и заканчивающиеся перегородкой. Незачеркнутая часть коридоров будет выходом или маршрутом от выхода к выходу или к центру (рис. 16).

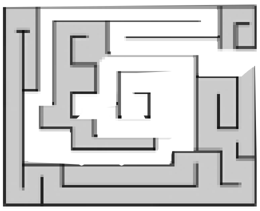


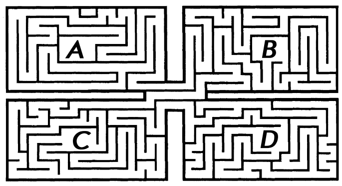
Рис. 16

Алгоритм (правило) одной руки. Идите по лабиринту, не отрывая правой (или левой) руки от стены лабиринта.

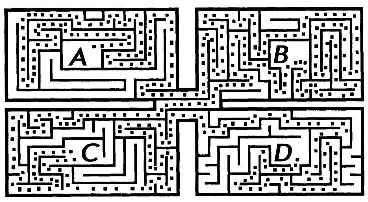
Данный алгоритм не универсален, но во многих случаях он может оказаться полезным. Он позволяет найти решение того лабиринта, все стены которого хотя и имеют сложные повороты или изгибы, но составляют непрерывное продолжение наружной стены.

Пример 22. Прочертите путь (рис. 17, *а*) из пункта *A* в пункт *D*, пройдя через пункты *B* и *C*.

Решение. Пользуясь одним из перечисленных методов обхода лабиринтов, легко найти ответ (рис. 17,*б*).



а



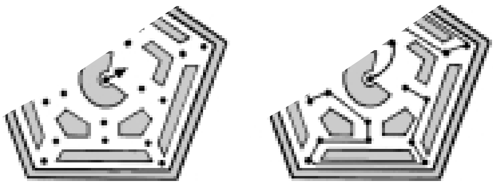
б

Рис. 17

* Продолжение. Начало см. в № 5/2002 г.

Пример 23. Комендант крепости, проверяя посты, выходит из центрального помещения и, обойдя посты, возвращается обратно (рис. 18,*а*). Каким должен быть его маршрут, чтобы побывать у каждого часового и дважды по одному и тому же пути не проходить?

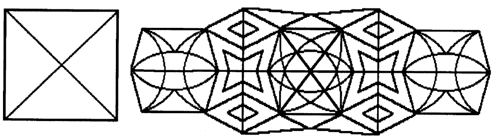
Ответ показан на рис. 18,*б*.



а *б*

Рис. 18

Лабиринтные задачи тесно связаны с задачами, в которых требуется начертить фигуры одним росчерком, т.е. не отрывая карандаша или ручки от бумаги и не проводя более одного раза по одной и той же линии. Парадоксально, но факт: обыкновенный квадрат с двумя диагоналями начертить нельзя (рис. 19,*а*), а фигуру, изображенную на рис. 19,*б,* – можно.



а *б*

Рис. 19

Существует простое правило, позволяющее определить, можно ли начертить фигуру одним росчерком (такие фигуры называются *уникурсальными* или *эйлеровыми*). Прежде чем его сформулировать, напомним некоторые сведения из теории графов. Фигуры, состоящие из ряда точек, соединенных между собой прямолинейными отрезками, кривыми линиями или дугами, называются *графами.* Точки называются *вершинами* графа, а линии (прямые или кривые) – *ребрами.* Вершину называют четной, если в ней сходится четное число ребер (линий), и нечетной, если число сходящихся в ней ребер (линий) нечетное. Правило вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. Граф будет уникурсальным, если все его вершины являются четными или если граф содержит не более чем две нечетные вершины (в этом случае успешный росчерк должен начинаться в одной из них).

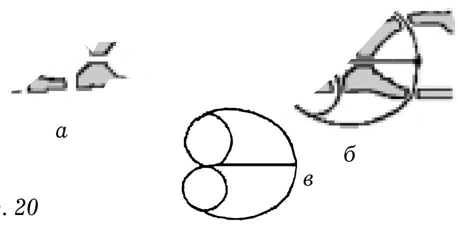
Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что уникурсальный граф имеет более трех нечетных вершин. Тогда, рисуя такой граф, в каждую вершину, за исключением начальной и конечной, мы войдем столько же раз, сколько выйдем из нее. Поэтому степени всех вершин уникурсального графа (за исключением, быть может, только двух: начальной и конечной) должны быть четными. Получили противоречие. Теорема доказана.

Рисование уникурсальных фигур принадлежит к числу очень интересных развлечений, которыми увлекались и увлекаются многие любители головоломок, и начало этому положил выдающийся математик XVIII в. Леонард Эйлер. Ему принадлежит первая работа о графах, появившаяся в 1736 г. в публикациях Петербургской Академии наук. В ней была решена следующая задача.

Пример 24 (задача «о кенигсбергских мостах»). На реке, протекающей через город Кенигсберг и омывающей два острова, имеется семь мостов (рис. 20,*а*). Может ли пешеход обойти все мосты, пройдя по каждому из них только один раз, и вернуться в исходную точку?

Решение. Полагая, что вершины соответствуют районам суши, а ребра – мостам, эту задачу можно сформулировать в виде вопроса о возможности последовательного обхода графа, изображенного на рис. 20,*в*, с условием однократного использования его ребер и возвращения в исходную точку. Отрицательный ответ на вопрос задачи следует из теоремы 4 (граф на рис. 20,*в* имеет четыре нечетные вершины).

Ответ: нет, нельзя.



а *б* *в*

Рис. 20

При решении лабиринтных задач форма, ширина и длина лабиринтных коридоров не играют никакой роли. Существенно только наличие или отсутствие перекрестков и отдельно стоящих стенок. В топологии (одном из разделов математики) также нет углов и расстояний между точками. Поэтому для решения лабиринтных задач важны не метрические, а топологические свойства лабиринта. Так, на рис. 21 показаны внешне различные, а для решения лабиринтных задач неразличимые лабиринты.

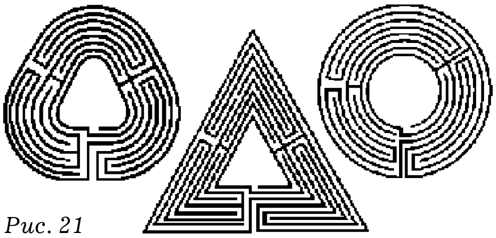


Рис. 21

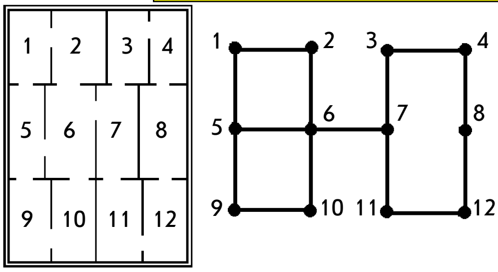
Маршруты в лабиринте могут быть представлены как ребра графа, а точки пересечения двух и более путей – как его вершины. Поэтому поиск маршрута в лабиринте сводится к построению алгоритма поиска маршрута в соответствующем графе от заданной вершины *А* до заданной вершины *В*. При этом *если единственные нечетные вершины графа, соответствующего лабиринту, – это вход в лабиринт и его центр (т.е. в лабиринте нет ни одного тупика), то такой лабиринт можно обойти уникурсально.*

Пример 25. Экскурсоводу нужно выбрать маршрут по залам музея (рис. 22,*а*) так, чтобы обойти все залы, ни в какой не заходя дважды. Где нужно начать и закончить осмотр? Найдите один из возможных маршрутов.

Решение. Построим граф данного лабиринта (рис. 22,*б*). Видим, что имеются два зала с нечетным числом дверей (5-й и 7-й). Значит, начало обхода в одном из них, а конец – в другом.

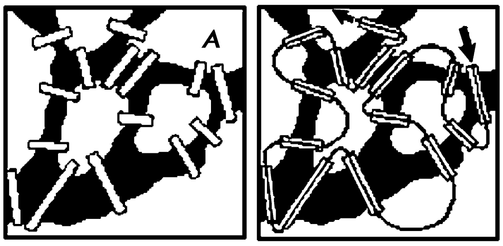
Пример 26. Необходимо пройти по всем мостам (рис. 23,*а*), соединяющим острова, начиная от пункта *А*. Дважды проходить по одному и тому же мосту нельзя.

Ответ показан на рис. 23,*б*.



а *б*

Рис. 22



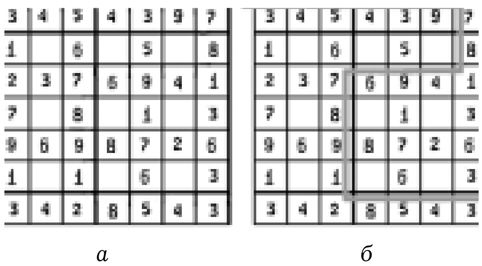
а *б*

Рис. 23

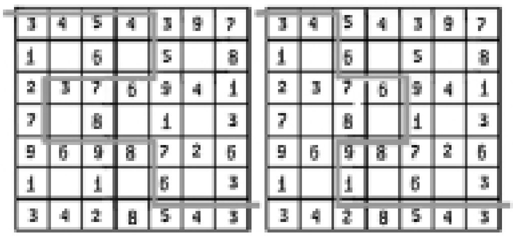
При организации внеклассной работы по математике в начальных классах важен сам процесс нахождения правильных путей по лабиринтам, что развивает и совершенствует внимание школьников, развивает их логическое мышление. Большой интерес для развития внимания и совершенствования навыков устных вычислений представляют так называемые **числовые лабиринты**. Степень трудности «прохождения» таких лабиринтов достаточно велика, так как в них имеется разветвленная сеть дорожек, продвигаясь по которым необходимо выполнить определенные задания вычислительного характера.

Пример 27. Пройди по клеткам от верхней цифры 3 к нижней цифре 3 (см. рис. 24,*а*) так, чтобы: 1) сумма чисел составила 110; 2) сумма чисел составила 115; 3) сумма чисел составила 88.

Ответ показан на рис. 24, *б, в, г.*



а *б*

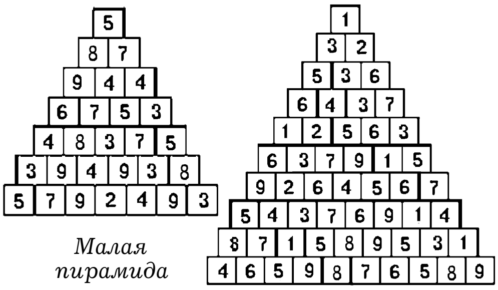


в *г*

Рис. 24

Пример 28 (числовая пирамида). Необходимо пройти от вершины пирамиды к ее основанию (рис. 25), переходя из каждой клетки в одну из расположенных под ней, и набрать по дороге заданную сумму. На малой пирамиде надо отыскать такие маршруты, чтобы сумма чисел от верхнего до нижнего ряда составила сначала 35, потом 45 и 55. На большой – сначала 40, потом 50, затем 60.

Ответ. Малая пирамида: $5 + 7 + 4 + 3 + 5 + 8 + 3 = 35$; $5 + 8 + 9 + 7 + 3 + 9 + 4 = 45$; $5 + 8 + 9 + 7 + 8 + 9 + 9 = 55$. Большая пирамида: $1 + 3 + 8 + 3 + 6 + 1 + 6 + 1 + 3 + 8 = 40$; $1 + 2 + 6 + 7 + 8 + 5 + 7 + 4 + 1 + 9 = 50$; $1 + 3 + 8 + 4 + 5 + 9 + 5 + 9 + 9 + 7 = 60$.



Малая пирамида

Большая пирамида

Рис. 25

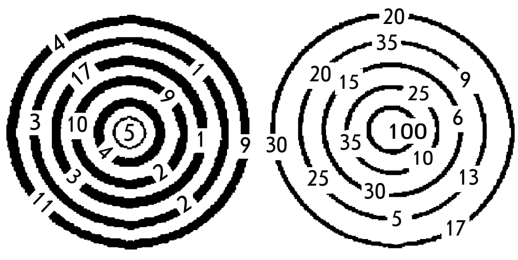
Арифметические лабиринты представляют собой частный случай числовых лабиринтов. Они, как правило, имеют вид концентрических кругов с воротами. У ворот стоят числа. Для того чтобы дойти до центра, нужно получить стоящее в центре число. Арифметические лабиринты могут требовать для своего решения или одного действия (обычно сложения), или нескольких.

Пример 29. Найдите путь к центру лабиринта (рис. 26,*а*), соблюдая условие: пройдя через пять ворот (через одни ворота в каждой окружности) и дойдя до центра, надо набрать сумму 100.

Ответ: имеется несколько решений: 1) $20 + 35 + 15 + 25 + 5 = 100$; 2) $17 + 13 + 30 + 35 + 5 = 100$ и др.

Пример 30. Как пройти через 5 ворот, производя над данными числами четыре арифметических действия, и получить в ответе 5 (рис. 26,*б*)?

Ответ: имеется несколько решений: 1) $((9 + 1) \cdot 3 - 10) : 4 = 5$; 2) $((3 \cdot 4 + 17) - 9) : 4 = 5$; 3) $((3 \cdot 9 - 17) \cdot 2) : 4 = 5$ и др.



а *б*

Рис. 26

Задачи в «математическую копилку учителя».

19. Почтальон Печкин разнес почту во все дома деревни, после чего зашел с посылкой к дяде Федору. На рис. 27 показаны все тропинки, по которым проходил Печкин, причем, как оказалось, ни по одной из них он не проходил дважды. Каков мог быть маршрут почтальона Печкина? В каком доме живет дядя Федор?

Ответ: тропинки образуют граф с двумя «нечетными» узлами – у почты и дома № 5. Начало маршрута на почте, а конец – у дома № 5 – там и живет дядя Федор.

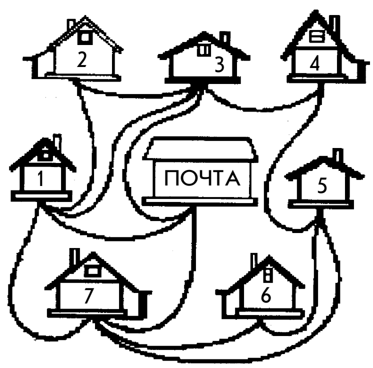


Рис. 27

20. Найдите путь от входа (*1*) к выходу (*2*) в пространственном лабиринте (рис. 28).

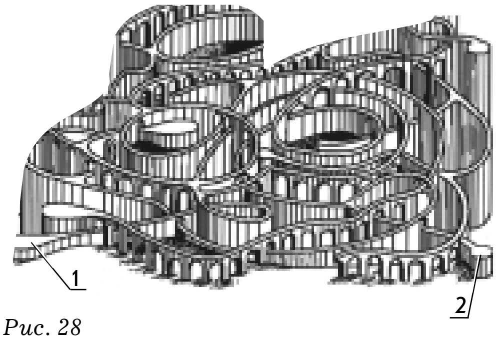


Рис. 28

21. Какую из фигур, изображенных на рис. 29, можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не прочерчивая линий по уже проведенным?

Ответ: 1, 4, 5, 6.

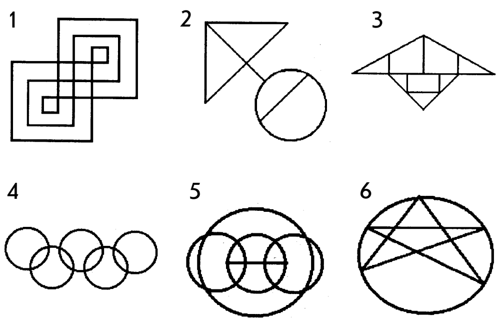


Рис. 29

22. Как пройти через трое ворот и набрать сумму 75 (рис. 30,*а*)?

23. В воротах этого лабиринта (рис. 30,*б*) расставлены одни сомножители. Как, пройдя 5 ворот, набрать произведение 900?

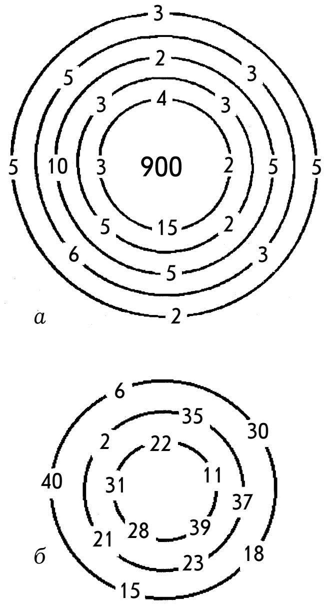


Рис. 30

(Продолжение следует)

Александр Павлович Тонких *– канд. физ.-мат. наук, доцент Брянского государственного университета.*

Внимание! Новинки!

Издательство «Баласс» выпустило

«Тетради по чтению»

к учебникам Р.Н. Бунеева и Е.В. Бунеевой
«Капельки солнца», «Маленькая дверь в большой мир», «В одном счастливом детстве», «В океане света».

В тетради включены:

- тренировочные упражнения на отработку техники чтения;
- задания, развивающие умение понимать прочитанное в процессе чтения текста;
- творческие задания для работы с текстом после чтения.

Заявки принимаются по адресу: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс».
Справки по телефонам: (095) 176-12-90, 176-00-14.
E-mail:balass.izd@mtu-net.ru http://www.mtu-net.ru/balass